Thermodynamique
TD 1

Exercice 1 : Formes différentielles

1. Les formes suivantes sont elles exactes ?
   (a) $\delta\omega_1 = 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$
   (b) $\delta\omega_2 = 2xe^{x^2-y}\mathrm{d}x - 2e^{x^2-y}\mathrm{d}y$
   (c) $\delta\omega_3 = xy\mathrm{d}x - z\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}z$
   (d) $\delta\omega_4 = yz^2\mathrm{d}x + (xz^2 + z)\mathrm{d}y + (2xyz + 2z + y)\mathrm{d}z$
2. Calculer l'intégrale de la première forme $\delta\omega_1$ entre les points $(0,0)$ et $(2,3)$ de deux façons différentes.

Exercice 2 : Effusion par un trou

1. Rappeler les hypothèses du modèle cinétique du gaz parfait, ainsi que les grandes étapes du raisonnement permettant d'obtenir l'équation d'état.
2. Quelle est la relation liant l'énergie cinétique moyenne du gaz à la température ? En déduire l'expression de la vitesse quadratique moyenne du gaz.

On considère une boîte de volume V contenant un gaz parfait maintenu à une température constante T. Cette boîte est percée d'un trou de section s supposé assez petit pour que le gaz reste au repos à chaque instant. A l'extérieur de la boîte, c'est le vide absolue. On considère que chaque particule a une vitesse égale à la vitesse quadratique moyenne. Ces vitesses ne sont orientées que selon $\pm\mathbf{e}_x$, $\pm\mathbf{e}_y$, $\pm\mathbf{e}_z$ et la répartition de ces six directions est isotropes.

3. Déterminer le nombre de particule $\mathrm{d}N$ passant à travers le trou en un temps $\mathrm{d}t$.
4. En déduire la loi d'évolution de la pression dans la boîte.
5. On donne $V = 1\,\mathrm{L}$, $T = 0\,°\mathrm{C}$, $s = 1\,\mu\mathrm{m}^2$ et $M = 4\,\mathrm{g/mol}$ (hélium). Calculer au bout de combien de temps la pression est diminuée de moitié.

On considère maintenant deux boîtes adjacentes de volumes V_1 et V_2 maintenues à la même température T. Chacune contient le même gaz parfait monoatomique mais de pressions initiales différentes. Ces deux boîtes sont séparées par une paroi diatherme percée du même trou de section s que précedemment.

6. Quelle relation existe-t-il entre le nombre de particule de chaque boîte N_1 et N_2 ?
7. Déterminer les lois d'évolutions des pressions dans chaque compartiment.
8. Que deviennent ces expressions pour $t \to \infty$. Commenter.

Exercice 3 : Profils de température et de pression dans l'atmosphère

On considère l'atmosphère terrestre comme un gaz parfait diatomique (20% O_2, 80% N_2). On suppose que l'accélération de la gravité g est une constante sur les 10 premiers kilomètres. Le gradient de pression dans l'atmosphère vérifie la relation fondamentale de l'hydrostatique :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{1}$$

Cas isotherme

On considère tout d'abord que l'atmosphère est isotherme à la température T_m.

1. A partir de l'équation d'état des gaz parfait, exprimer la masse volumique du gaz ρ en fonction de T et p.
2. En déduire, l'expression de $p(z)$. Commenter le résultat.

Cas adiabatique (isentropique)

En réalité, la convection thermique dans l'atmosphère à laquelle s'ajoute les effets de compressibilité crée un gradient de température, appelé *gradient adiabatique*, donné par la relation :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g\alpha T}{c_p} \tag{2}$$

où c_p est la capacité massique isobare du gaz supposée constante pour un gaz parfait, et α est le coefficient de dilatation isobare définit par :

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3}$$

3. Déterminer l'expression de α pour un gaz parfait.
4. En déduire le profil de température $T(z)$.
5. Donner alors l'équation différentielle vérifiée par la pression. En déduire l'expression de $p(z)$.
6. On donne le gradient de température : $10^{-3}\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Commenter le gradient de pression obtenu. Donner la pression atmosphérique en haut du Mont Blanc. Que pensez-vous du temps de cuisson des pâtes à cette altitude là ?