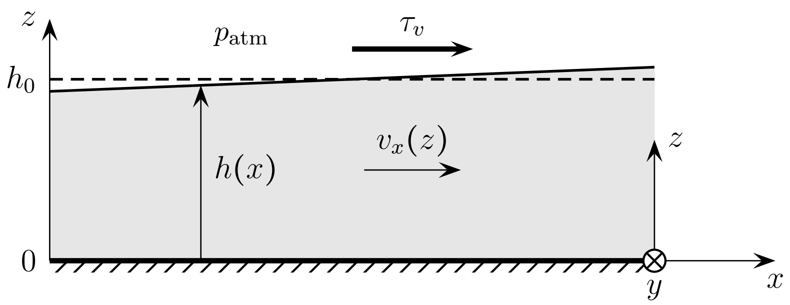
Mécanique des fluides

Durée 1h00. Sans documents.

1 Circulation dans un lac



On s'intéresse à l'écoulement dans un lac induit par du vent soufflant suivant la direction x à la surface du lac. Le vent pousse l'eau de surface, et on note $h(x)$ l'épaisseur de la couche d'eau, l'épaisseur moyenne étant notée h_0. L'écoulement est supposé être stationnaire. On suppose que l'épaisseur $h(x)$ s'écarte peu de h_0, et l'écoulement est supposé parallèle, $\vec{v} = v_x(z)\vec{e}_x$, tant que l'on se situe loin des berges du lac. On note ρ la masse volumique de l'eau et η sa viscosité dynamique.

1. Rappelez la forme générale de l'équation de Navier-Stokes, et en déduire l'expression des composantes suivant x et z de Navier-Stokes dans le cas d'un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v_x(z)\vec{e}_x$.

Le vent exerce une contrainte tangentielle $\tau_{zx} = \tau_v$ à la surface du lac, qui met l'eau du lac en mouvement. On note p_{atm} la pression atmosphérique.

2. Quelles conditions limites doit-on imposer en $z = 0$ et $z = h(x)$? On suppose la pente dh/dx très petite devant 1, ce qui permet de supposer que la normale $\vec{n}$ à la surface du lac est parfaitement verticale : $\vec{n} = \vec{e}_z$.
3. Intégrez suivant z la composante verticale de l'équation de Navier-Stokes pour en déduire la pression p en fonction de z et $h(x)$.
4. Insérez cette expression dans la composante suivant x de l'équation de Navier-Stokes. Montrez que la vitesse est donnée par
$$v_x = \frac{\rho g}{2\eta}\frac{dh}{dx}(z - 2h)z + \frac{\tau_v}{\eta}z. \tag{1}$$
Tracez l'allure des deux termes de droite en fonction de z, et interprétez. Quels types d'écoulements classiques retrouve-t-on dans les limites (1) $dh/dx = 0$, et (2) $\tau_v = 0$?
5. Calculez le débit linéique q à travers une section verticale (=débit à travers la couche d'eau d'épaisseur h par unité de longueur suivant y).
6. Que doit valoir ce débit lorsque l'écoulement est stationnaire ? En déduire l'expression de dh/dx, puis de v_x, en régime stationnaire.

2 Vagues et ondes capillaires

On cherche à estimer la période d'oscillation T d'ondes (~ vagues) se propageant à la surface d'une couche d'eau de densité ρ et de viscosité cinématique ν en contact avec de l'air. On note γ la tension interfaciale eau/air, λ la longueur d'onde, et g l'accélération de la gravité.

1. Utilisez le théorème de Vaschy-Buckingham pour montrer que T est égale au produit de la quantité $\sqrt{\lambda/g}$ et d'une fonction (indéterminée) de nombres sans dimension à déterminer (Rq : plusieurs formulations sont possibles).
2. En déduire l'expression de T si
   (a) les effets de viscosité et tension de surface sont supposés négligeables ;
   (b) les effets de viscosité et de gravité sont supposés négligeables par rapport aux effets de tension de surface.