# Mécanique des fluides

*Durée 1h30. Sans documents, calculette inutile.*

## 1 Fleuves et torrents

On étudie un écoulement stationnaire et potentiel d'eau dans un chenal rectiligne de largeur $L$. Le fond du chenal est horizontal, sauf au niveau d'un obstacle d'extension finie et de faible pente. Comment la surface de l'eau est-elle perturbée par l'obstacle ?

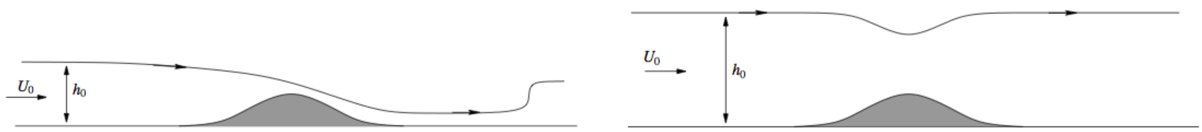
Le fond du chenal est à $z_f(x)$, la surface de l'eau à $z_s(x)$, et la profondeur d'eau est notée $h(x) = z_s(x) - z_f(x)$. On suppose que les variations de $h$ sont suffisamment faibles pour que les lignes de courant soient parallèles à $Ox$. On note $V(x)$ la vitesse de l'eau dans la direction $(Ox)$ de l'écoulement, supposé indépendant de $z$. On note $\rho$ la masse volumique de l'eau, $g$ la gravité, et $p_{\text{atm}}$ la pression atmosphérique.

*Rajouter un schéma.*

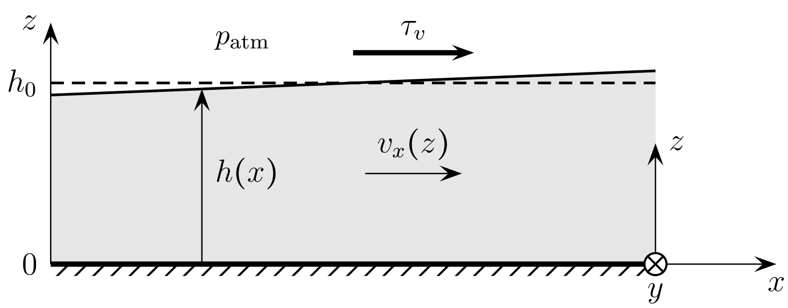
1. Estimez l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds dans un fleuve et un torrent. Justifiez que l'on peut modéliser ces écoulements par un fluide parfait.
2. Utilisez une relation de Bernoulli et la conservation du débit volumique $Q$ pour montrer que la quantité

$$h + z_f + \frac{Q^2}{2gL^2h^2} \tag{1}$$

   est constante le long du chenal.
3. En déduire une relation donnant $dh/dx$ en fonction de $dz_f/dx$, $h$ et des autres variables du problème.
4. Utilisez cette relation pour interpréter et discuter les différents régimes d'écoulements représentés sur la figure ci dessous. Sous quelles conditions l'écoulement se fera-t-il en régime *torrentiel* (figure de gauche) ou en régime *fluvial* (figure de droite) ?




## 2 Circulation dans un lac




On s'intéresse à l'écoulement dans un lac induit par du vent soufflant suivant la direction $x$ à la surface du lac. Le vent pousse l'eau de surface, et on note $h(x)$ l'épaisseur de la couche d'eau, l'épaisseur moyenne étant notée $h_0$. L'écoulement est supposé être stationnaire. On suppose que l'épaisseur $h(x)$ s'écarte peu de $h_0$, et l'écoulement est supposé parallèle, $\vec{v} = v_x(z)\vec{e}_x$, tant que l'on se situe loin des berges du lac. On note $\rho$ la masse volumique de l'eau et $\eta$ sa viscosité dynamique (l'eau est un fluide newtonien).

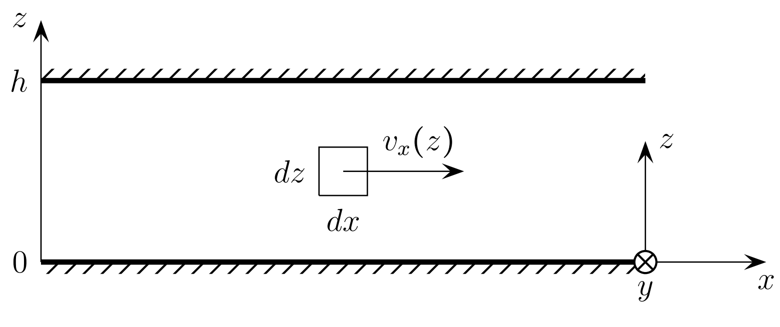
1. Rappelez la forme générale de l'équation de Navier-Stokes, et en déduire l'expression des composantes suivant $x$ et $z$ de Navier-Stokes dans le cas d'un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v_x(z)\vec{e}_x$.

Le vent exerce une contrainte tangentielle $\tau_{zx} = \tau_v$ à la surface du lac, qui met l'eau du lac en mouvement. On note $p_{\text{atm}}$ la pression atmosphérique.

2. Quelles conditions limites doit-on imposer en $z = 0$ et $z = h(x)$ ? On suppose la pente $dh/dx$ très petite devant 1, ce qui permet de supposer que la normale $\vec{n}$ à la surface du lac est parfaitement verticale : $\vec{n} = \vec{e}_z$.
3. Intégrez suivant $z$ la composante verticale de l'équation de Navier-Stokes pour en déduire la pression $p$ en fonction de $z$ et $h(x)$.
4. Insérez cette expression dans la composante suivant $x$ de l'équation de Navier-Stokes. En intégrant cette équation et en utilisant les conditions limites, montrez que la vitesse est donnée par
$$v_x = \frac{\rho g}{2\eta}\frac{dh}{dx}(z - 2h)z + \frac{\tau_v}{\eta}z. \tag{2}$$
Tracez l'allure des deux termes de droite en fonction de $z$, et interprétez. Quels types d'écoulements classiques retrouve-t-on dans les limites (1) $dh/dx = 0$, et (2) $\tau_v = 0$ ?
5. Calculez le débit linéique $q$ à travers une section verticale (=débit à travers la couche d'eau d'épaisseur $h$ par unité de longueur suivant $y$).
6. Que doit valoir ce débit lorsque l'écoulement est stationnaire ? En déduire l'expression de $dh/dx$, puis de $v_x$, en régime stationnaire.
7. Tracez le profil de vitesse $v_x(z)$ en régime stationnaire.

# 3 Écoulement de Poiseuille plan pour un fluide non-newtonien

De nombreux fluides géophysiques comme les boues, les milieux granulaires, les matériaux pyroclastiques, les laves ou la glace ont des comportements non-newtoniens. Le but de ce problème est de comparer les comportements de fluides newtoniens et non-newtoniens en prenant comme exemple l'écoulement d'un fluide entre deux plaques parallèles immobiles séparées d'une distance $h$, forcé par un gradient de pression horizontal $dp/dx$ uniforme et constant. On néglige l'effet de la pesanteur. Le champ de vitesse est supposé stationnaire, dirigé parallèlement au gradient de pression, et invariant suivant les directions $x$ et $y$ : $\vec{v} = v_x(z)\vec{e}_x$.




On note $\dot{\gamma} = \dfrac{dv_x}{dz}$ le taux de cisaillement et $\tau_{zx}$ la contrainte cisaillante. Pour un fluide quelconque, on définit la viscosité effective comme $\eta(\dot{\gamma}) = \tau_{zx}/\dot{\gamma}$.

1. En faisant un bilan des forces s'exerçant sur une particule fluide d'épaisseur $dz$, de largeur $dx$, et de largeur unité suivant $y$, montrez que

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dz}\left[\eta(\dot{\gamma})\frac{dv_x}{dz}\right]. \tag{3}$$

2. Quelles conditions limites doit-on appliquer au champ de vitesse en $z = 0$ et $z = h$ ?
3. **Cas d'un fluide newtonien** – On considère dans un premier temps l'écoulement d'un fluide newtonien, pour lequel $\eta$ ne dépend pas du taux de cisaillement.
   (a) Intégrez l'équation (3) en utilisant les conditions limites en $z = 0$ et $h$ pour trouver le profil de vitesse entre les deux plaques.
   (b) Calculez ensuite le débit linéique $q$ à travers une section verticale (débit à travers une section verticale par unité de longueur suivant $y$).
4. **Cas d'un fluide rhéo-fluidifiant** – De nombreux fluides géophysiques, comme la glace ou des laves, sont des fluides dits *rhéo-fluidifiant*, pour lesquels la relation entre contrainte et taux de cisaillement est de la forme $\tau_{zx} \propto \dot{\gamma}^n$ où $n < 1$. Dans la suite, on prendra $n = 1/3$ et une rhéologie de la forme

$$\tau_{zx} = A\,\dot{\gamma}^{1/3}.$$

   (a) Que vaut $\eta(\dot{\gamma})$ ? Justifiez le terme *rhéo-fluidifiant.*
   (b) Intégrez l'équation (3) et montrez que le profil de vitesse est de la forme

$$v_x = \frac{h^4}{4A^3}\left(\frac{dp}{dx}\right)^3\left[\left(\frac{z}{h} + B\right)^4 + C\right].$$

   (c) Déterminez les constantes $B$ et $C$ en appliquant les conditions limites en $z = 0$ et h. [*Note* : il pourra être utile d'utiliser l'identité $x^{2p} - y^{2p} = (x^p - y^p)(x^p + y^p)$.]
   (d) Calculez ensuite le débit linéique $q$ à travers une section verticale.
5. Tracez qualitativement le débit $q$ en fonction du gradient de pression $dp/dx$, pour les deux rhéologies. Commentez.