

Mécanique des fluides

Durée 1h00. Sans documents.

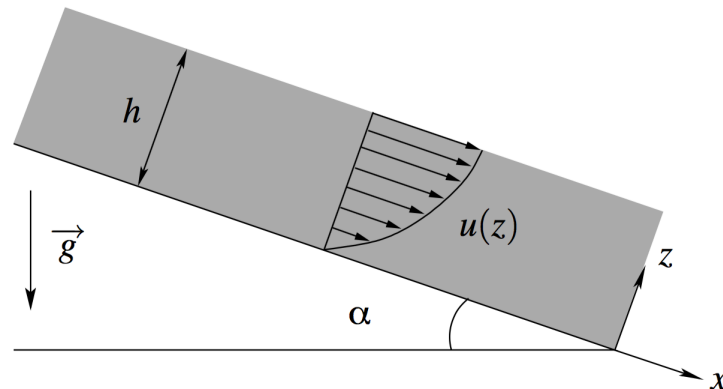
1 Grêlon

On souhaite estimer la vitesse de chute v d'un grêlon de diamètre $d = 1$ cm.

1. On suppose que le nombre de Reynolds est grand devant 1. Qu'est ce que cela implique ?
2. En utilisant la relation de Bernoulli, justifier que l'ordre de grandeur de la force de trainée F_T agissant sur le grêlon est $F_T \sim d^2 \rho_a v^2$, où ρ_a est la masse volumique de l'air.
3. En déduire une estimation de la vitesse terminale du grêlon. L'hypothèse $Re \gg 1$ est-elle justifiée ?

2 Écoulement le long d'une pente

On considère un écoulement stationnaire parallèle ($\vec{v} = u(z)\vec{e}_x$) sur un plan incliné de pente α . On note h l'épaisseur de la couche de fluide, ρ sa masse volumique, et \vec{g} l'accélération de la pesanteur.



On note $\dot{\gamma}(z) = \frac{du}{dz}$ le cisaillement et τ_{xz} la contrainte cisailante. De nombreux fluides géophysiques comme les boues, les milieux granulaires, les matériaux pyroclastiques ou la glace ont des comportements non-newtoniens ; pour ces fluides, on définit une viscosité effective dépendant de $\dot{\gamma}$ comme $\eta(\dot{\gamma}) = \tau_{xz}/\dot{\gamma}$. Le but de ce problème est de comparer l'écoulement obtenu pour un fluide newtonien avec celui d'un fluide non-newtonien de type fluide de Bingham.

1. En faisant un bilan des forces s'exerçant sur une particule fluide, montrer que

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin \alpha + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}. \quad (1)$$

2. Quelles conditions limites doit-on appliquer en $z = 0$ et $z = h$?
3. Que vaut $\frac{\partial P}{\partial x}$?
4. En déduire l'expression de τ_{xz} .
5. **Fluide newtonien** – On considère dans un premier temps l'écoulement d'un fluide newtonien, pour lequel le cisaillement est relié à la contrainte cisailante par $\tau_{xz} = \eta \dot{\gamma}$.
 - (a) Calculer le profil de vitesse $u(z)$.
 - (b) Calculer ensuite le débit volumique Q à travers une section de l'écoulement.
6. **Fluide à seuil : modèle de Bingham** – Une coulée de débris, constituée d'un mélange de particules solides et d'une matrice liquide, se comporte comme un fluide à seuil, qui ne s'écoule que si la contrainte cisailante dépasse une certaine valeur τ_0 . Cette caractéristique est décrite par la loi de Bingham :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau_{xz} < \tau_0, \\ \dot{\gamma} = \frac{\tau_{xz} - \tau_0}{\eta} & \text{si } \tau_{xz} \geq \tau_0. \end{cases} \quad (2)$$

- (a) Sur une pente donnée, quelle est l'épaisseur h_c en-deçà de laquelle le matériau ne coule pas ?
Application numérique : $\rho = 2000 \text{ kg.m}^3$, $\alpha = 4^\circ$, et $\tau_0 = 3000 \text{ Pa}$.
- (b) Si $h > h_c$, calculer le profil de vitesses de l'écoulement (on commencera par tracer le profil de τ_{xz}).
- (c) Calculer le débit volumique, et comparer avec le cas d'un fluide newtonien de même viscosité.